

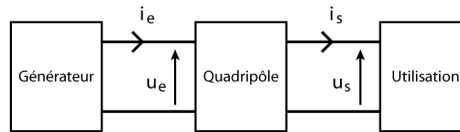
# Réponse fréquentielle d'un circuit linéaire

## Filtres du premier et du second ordre

### I. Présentation de l'étude d'un circuit linéaire

#### 1) Ordre d'un circuit

Considérons un circuit soumis à une excitation (grandeur d'entrée)  $e(t)$  et notons  $s(t)$  sa réponse (grandeur de sortie). Ce circuit d'étude est assimilé à un quadripôle comportant deux bornes d'entrée reliées au générateur (fournissant  $e(t)$ ) et deux bornes de sortie reliées au réseau d'utilisation (recevant  $s(t)$ ). Le signal d'entrée peut être soit le courant  $i_e(t)$ , soit la tension  $u_e(t)$ . De même, le signal de sortie correspond soit au courant  $i_s(t)$ , soit à la tension  $u_s(t)$ .



Si le circuit est linéaire, les grandeurs d'entrée et de sortie  $e(t)$  et  $s(t)$  sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

L'ordre d'un circuit linéaire est, par définition, l'ordre de son équation différentielle, c'est-à-dire l'ordre de dérivation,  $n$  ou  $m$ , le plus élevé.

#### 2) Fonction de transfert en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal forcé  $e(t)$  et  $s(t)$  ont pour expression :

$e(t) = E_m \cos(\omega t)$  et  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$  où  $\varphi$  représente le déphasage du signal de sortie  $s(t)$  par rapport au signal d'entrée  $e(t)$ .

Les grandeurs complexes associées à ces grandeurs sinusoïdales sont :

$$\underline{e} = E_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{s} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

En utilisation la notation complexe, on remplace l'équation différentielle précédente par une équation algébrique sur le corps des complexes du type :

$$[a_0 + j\omega a_1 + \dots + (j\omega)^n a_n] \underline{s} = [b_0 + j\omega b_1 + \dots + (j\omega)^m b_m] \underline{e}$$

Par définition, la fonction de transfert complexe notée  $\underline{H}(j\omega)$  du circuit linéaire soumis à une excitation sinusoïdale s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Soit  $\underline{H} = \frac{b_0 + j\omega b_1 + \dots + (j\omega)^m b_m}{a_0 + j\omega a_1 + \dots + (j\omega)^n a_n} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$  où  $N(j\omega)$  et  $D(j\omega)$  sont des polynômes en  $j\omega$  à coefficients constants de degré respectifs  $n$  et  $m$ .

Remarques :

- L'ordre du circuit correspond à l'ordre de  $\underline{H}$  donc au degré le plus élevé des polynômes  $N$  et  $D$ .

- on peut exprimer  $\underline{H}$  en fonction des amplitudes complexes :  $\underline{H} = \frac{S_m}{E_m}$  avec  $\underline{S_m} = S_m e^{j\varphi}$  et  $\underline{E_m} = E_m$

### 3) Réponse indicielle, réponse fréquentielle

L'analyse temporelle d'un circuit est l'étude de sa réponse effectuée à partir de son **équation différentielle** et des conditions initiales : **réponse indicielle**.

L'analyse fréquentielle d'un circuit est l'étude de sa réponse à partir de sa **fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$**  : **réponse fréquentielle**.

Ces deux analyses de la réponse d'un circuit sont intimement liées. En effet, les caractères instantanés (régime transitoire) sont dégagés lors de l'analyse temporelle tandis que les caractères permanents (régime sinusoïdal forcé) le sont lors de l'analyse fréquentielle.

Remarque : En régime sinusoïdal permanent, on peut, connaissant l'équation différentielle (grandeurs réelles), en déduire la fonction de transfert (grandeurs complexes) et inversement :  $(j\omega)^n \underline{X} \rightarrow \frac{d^n x}{dt^n}$ .

Nous allons étudier dans ce chapitre la réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale. **Cette réponse dépend de la fréquence de l'excitation (réponse fréquentielle)** : on dit qu'il y a un **effet de filtrage** car le circuit se comporte comme un filtre.

### 4) Diagramme de Bode

La fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  est un nombre complexe caractérisé par :

- son **module**  $|\underline{H}| = \left| \frac{s}{e} \right| = \frac{S_m}{E_m} = \mathbf{G}$  appelé **gain du filtre**
- son **argument**  $\arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{s}{e}\right) = \arg(s) - \arg(e) = \varphi$  **déphasage entre la sortie et l'entrée du filtre**.

Ainsi  $\underline{H} = G e^{j\varphi}$

La pulsation  $\omega$  varie dans une large gamme de fréquence (de quelques 0,1 Hz à quelques MHz pour un GBF par exemple). On utilise donc une échelle logarithmique pour  $\omega$  : **log ( $\omega$ )**.

De même, le gain  $G$  étant susceptible de varier dans une large gamme, on introduit une échelle logarithmique du type :  $G_{dB} = \mathbf{20 \log (G)}$  où  $G_{dB}$  **représente le gain en décibel**.

Afin qu'en « un seul coup d'œil », on voit le comportement d'un filtre, on choisit une représentation graphique appelée **diagramme de Bode**. Il s'agit de l'ensemble des deux graphes :

- $G_{dB}$  en fonction de  $\log(\omega)$  : **courbe de réponse en gain**.
- $\varphi$  en fonction de  $\log(\omega)$  : **courbe de réponse en phase**.

Remarque : On peut aussi représenter  $G_{dB}$  et  $\varphi$  en fonction de  $\log(f)$  ou  $\log(x)$  avec  $x$  pulsation réduite du circuit.

### 5) Filtrés actifs et passifs - Etude en sortie ouverte

Un filtre est dit **passif** s'il est composé par **des dipôles passifs** (R, L, C). Un filtre **actif** possède des **composants actifs** tels qu'un amplificateur opérationnel que l'on étudiera en TP.

On s'intéresse dans ce chapitre uniquement au cas où **l'utilisation à une impédance infinie** (oscilloscope par exemple). On dit alors que **l'étude du filtre se fait en sortie ouverte** car  $i_s(t) = 0$  et que la fonction de transfert est intrinsèque au filtre :  $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$ .

### III. Filtrés passifs du second ordre : Etude du circuit RLC série

On s'intéresse aux fonctions de transfert du second ordre, c'est-à-dire celles qui ont comme terme de plus haut degré  $\omega^2$  (ou  $x^2$ ).

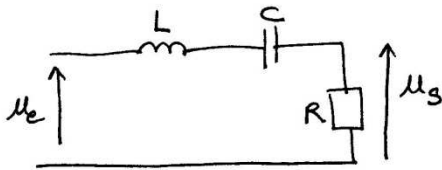
Toute l'étude sera menée sur le circuit RLC série. On réutilisera les résultats des calculs sur les résonances obtenus au Chapitre 6.

Dans la pratique, on utilise des circuits autres que le RLC série mais on pourra toujours se ramener à la forme canonique en utilisant les grandeurs caractéristiques telles que le **facteur de qualité Q**, la **pulsation réduite**  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  avec  $\omega_0$  la **pulsation propre** du circuit.

Dans le cas du RLC série, on rappelle que :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ .

#### 1) Aux bornes de R : Filtre passe-bande (cf. CHAPITRE 6 : II. Résonance en intensité)

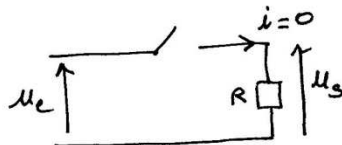
##### a) Etude qualitative



##### Comportement asymptotique

$$\boxed{\text{BF}} \quad \boxed{\omega \rightarrow 0} \Rightarrow \begin{cases} Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow +\infty \Rightarrow i_C \rightarrow 0 : \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ Z_L = j\omega L \rightarrow 0 \Rightarrow u_L \rightarrow 0 : \text{---} \text{---} \text{---} \end{cases}$$

Schema équivalent



$$u_s = Ri \text{ d'où } \boxed{u_s = 0}$$

$$\boxed{\text{HF}} \quad \boxed{\omega \rightarrow +\infty} \Rightarrow \begin{cases} Z_C \rightarrow 0 \Rightarrow u_C \rightarrow 0 : \text{---} \text{---} \text{---} \\ Z_L \rightarrow +\infty \Rightarrow i_L \rightarrow 0 : \text{---} \text{---} \end{cases}$$

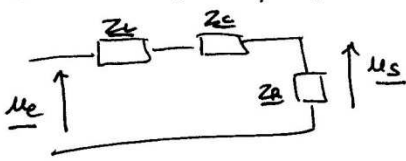
même schéma équivalent :  $\boxed{u_s = 0}$

Conclusion : Ce n'est ni un passe-bas, ni un passe-haut.

Dans le chapitre 6, on a vu que l'amplitude du courant  $I_m$  était maximale pour  $\omega = \omega_0$  donc  $RI_m = u_{sm}$  est maximale pour cette même pulsation. Ainsi le filtre semble laisser passer les fréquences intermédiaires mais couper les hautes et les basses fréquences : on parle d'un passe-bande.

## b) Etude de la fonction de transfert

De la même façon que pour le circuit RC, on utilise la formule de division de tension :



$$\underline{u_s} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}} \underline{u_e} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{Z_R} = R \\ \underline{Z_C} = j\omega L \\ \underline{Z_L} = \frac{1}{j\omega C} \end{cases}$$

Ainsi  $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L}$  d'où  $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC} + j\omega \frac{L}{R}}$

• En utilisant les grandeurs caractéristiques et vent :  $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega \times \frac{1}{Q\omega_0}} + j\omega \frac{Q}{\omega_0}}$

d'où  $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$  (forme canonique)

• Afin de déterminer l'ordre du filtre on se ramène à la forme canonique suivante :

$$\underline{H} = \frac{jx}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \leftarrow \text{polynôme de degré 2 en } x \Rightarrow \underline{\text{ordre 2.}}$$

Remarque : Au chap. 6 on a obtenu :  $\underline{I_m} = \frac{\frac{E_m}{R}}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$  soit  $\frac{RI_m}{E_m} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$

et on retrouve la même expression car  $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{u_i}}{\underline{u_e}} = \frac{RI_i}{E_m}$  ( $i = I_m e^{j\omega t}$ ,  $u = E_m e^{j\omega t}$ ,  $u_e = E_m e^{j\omega t}$ )

• Comportement asymptotique (on obtient les équations des asymptotes du diagramme de Bode)

BF  $\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0$  d'où  $\underline{H} \sim \frac{1}{-j\frac{Q}{x}} = \frac{jx}{Q}$  alors

$$\begin{cases} \cdot G = \frac{x}{Q} \text{ et } G_{dB} = 20 \log\left(\frac{x}{Q}\right) \\ \text{soit } \underline{G_{dB}} = 20 \log x - 20 \log Q \\ \cdot \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

HF  $\omega \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$  d'où  $\underline{H} \sim \frac{1}{jQx} = \frac{-j}{Qx}$  alors

$$\begin{cases} \cdot G = \frac{1}{Qx} \text{ et } G_{dB} = -20 \log(Qx) \\ \text{soit } \underline{G_{dB}} = -20 \log x - 20 \log Q \\ \cdot \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## Remarques :

- On retrouve le comportement asymptotique obtenu en a) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(BF)} \quad H \sim \frac{j\omega}{Q} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \\ \text{(HF)} \quad H \sim \frac{-j}{Q\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \text{d'où } \underline{u_s} \rightarrow 0 \text{ à très hautes et très basses fréquences.}$$

- Comme pour le circuit RC, on constate :

- un comportement dérivateur à (BF) :  $H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{j\omega}{Q} = \frac{j\omega}{\omega_0 Q} \Rightarrow u_s = \frac{1}{\omega_0 Q} j\omega u_e$

soit  $u_s(t) = \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{d u_e(t)}{dt}$

- un comportement intégrateur à (HF) :  $H = \frac{-j}{Q\omega} = \frac{1}{j\omega Q} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega} \Rightarrow u_s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{u_e}{j\omega}$

soit  $u_s(t) = \frac{\omega_0}{Q} \int u_e(t) dt$

## Etude du Gain

$$G = |H| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2}}$$

En reprenant les résultats du chapitre 6 (d'un facteur multiplicatif près,  $\frac{E_m}{R}$ ) il vient :

\*  $G_{\max} = 1$  pour  $\omega = 1$  soit  $\omega = \omega_0$  : on dit qu'il y a résonance quel que soit le facteur de qualité  $Q$ .

\* la bande passante du filtre correspond à l'intervalle  $[\omega_{c1}; \omega_{c2}]$  où  $\omega_{c1}, \omega_{c2}$  sont les pulsations de coupure du filtre. Pour  $\omega \in [\omega_{c1}; \omega_{c2}]$  on a  $G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

soit  $G_{dB}(\omega) \geq -3 \text{ dB}$ . On rappelle que la largeur de la bande passante vérifie :

$$\Delta \omega_c = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{Q} \text{ donc plus } Q \text{ est grand et plus la bande passante est}$$

étroite : on dit que le filtre est sélectif et que la résonance est aigüe

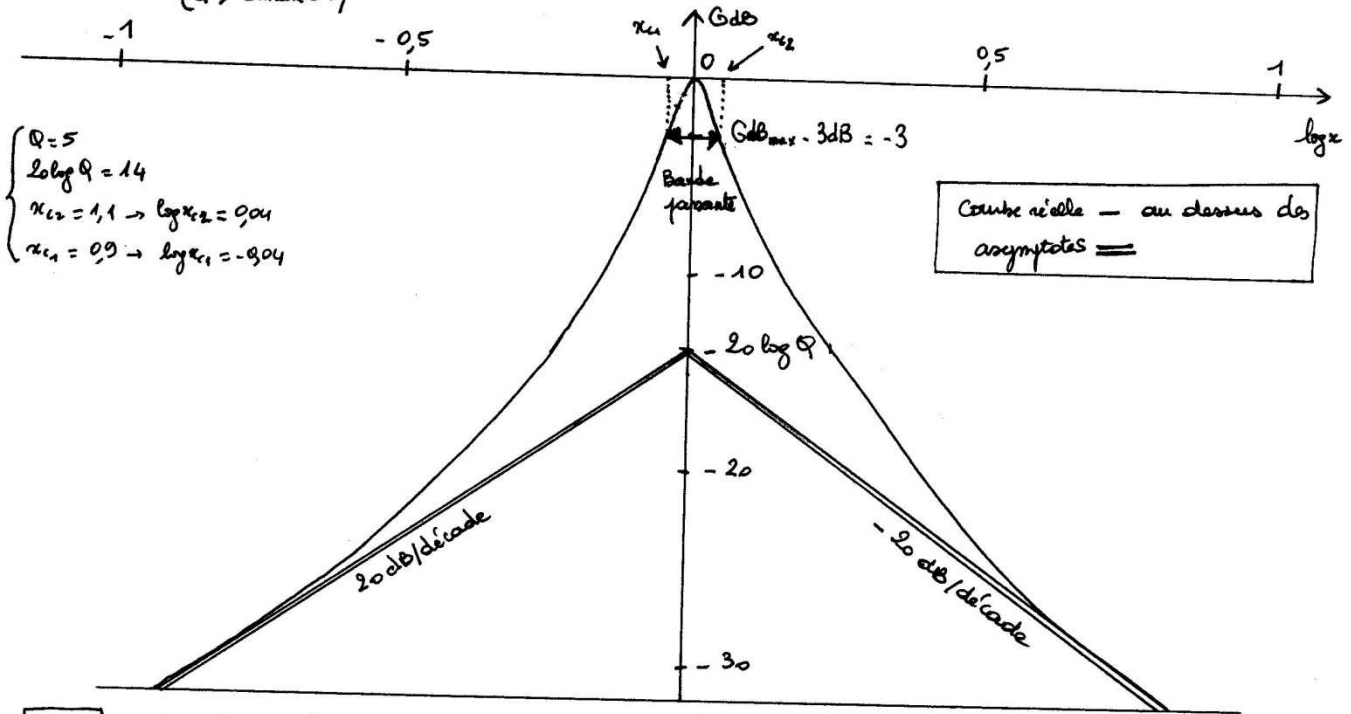
## Etude de la phase

$$\varphi = \arg(H) = -\arg\left(1 + jQ\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\right) \text{ m\u00eame r\u00e9sultat que dans le chapitre 6.}$$

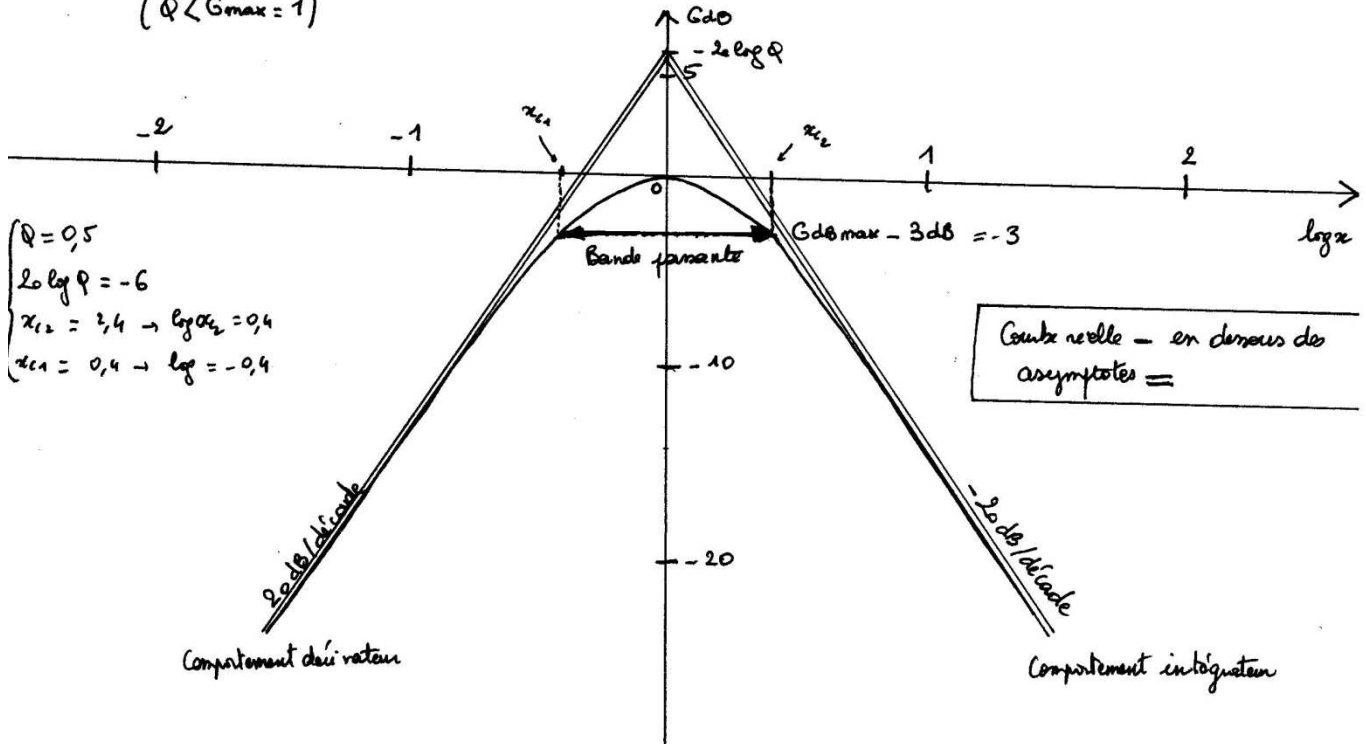
c) Diagramme de Bode

Etude de la réponse en gain

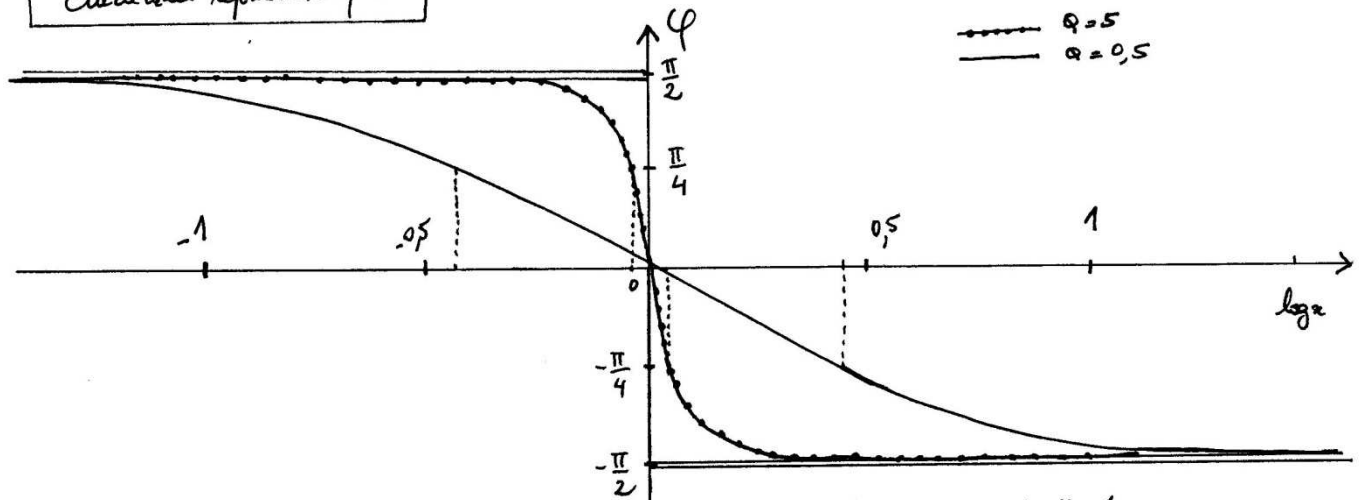
**Cas 1** :  $Q$  élevé - Résonance aigue - Bande passante étroite - Filtre sélectif  
 ( $Q > G_{max} = 1$ )



**Cas 2** :  $Q$  faible - Résonance floue - Bande passante large - Filtre peu sélectif  
 ( $Q < G_{max} = 1$ )



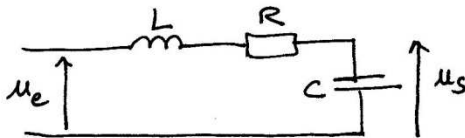
Etude de la réponse en phase



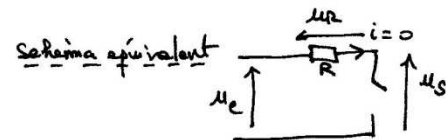
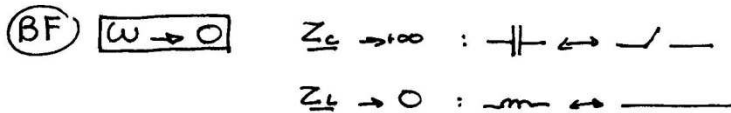
Le changement de signe de la phase est d'autant plus rapide que Q est élevé.

**2) Aux bornes de C : Filtre passe-bas** (cf. CHAPITRE 6 : III. Résonance en tension)

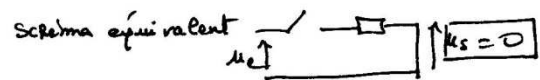
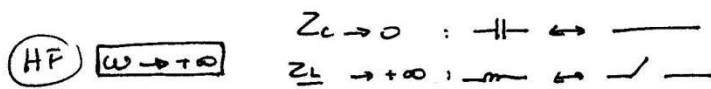
a) Etude qualitative



Comportement asymptotique



$$\begin{cases} u_R = Ri = 0 \\ u_C = u_R + u_s \end{cases} \rightarrow u_s = u_e$$



Conclusion : On prévoit un filtre passe-bas.

b) Etude de la fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_L} \quad (\text{diviseur de tension}) \quad \text{soit} \quad \underline{H} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

En utilisant les grandeurs caractéristiques il vient : 
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

d'où 
$$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad (\text{Orde 2})$$

## b) Etude de la fonction de transfert

Remarque: Au chap. 6 on a obtenu:  $\underline{u}_{cm} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$  soit  $\frac{\underline{u}_{cm}}{E_m} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$  et on retrouve la même expression car  $\underline{H} = \frac{\underline{u}_c}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{u}_{cm}}{E_m}$ .

### Comportement asymptotique

$$\begin{aligned} \text{(BF)} \quad \omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0 \text{ d'où } \underline{H} \sim 1 \text{ alors } & \begin{cases} G = 1 \text{ et } \underline{GdB} = 0 \\ \underline{\varphi} = 0 \end{cases} \\ \text{(HF)} \quad \omega \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty \text{ d'où } \underline{H} \sim \frac{1}{x^2} \text{ alors } & \begin{cases} G = \frac{1}{x^2} \text{ et } \underline{GdB} = 20 \log \frac{1}{x^2} \text{ soit } \underline{GdB} = -40 \log x \\ \underline{\varphi} = -\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque: On retrouve le comportement asymptotique obtenu en a):

$$\text{(BF)} \quad \underline{H} \sim 1 \text{ soit } \underline{u}_s = \underline{u}_e$$

$$\text{(HF)} \quad \underline{H} \sim \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ soit } \underline{u}_s = 0$$

### Etude du Gain

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

En reprenant les résultats du chapitre 6 (à un facteur multiplicatif près  $E_m$ ) il vient:

• G passe par un maximum pour  $x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  ( $\Leftrightarrow$ ) si  $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ : on dit qu'il y a résonance en tension et  $G_{max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$  ( $> 1$ ).

• Contrairement à la résonance en intensité, la résonance en tension dépend du facteur de qualité. En effet si  $\boxed{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$  il n'y a pas résonance.

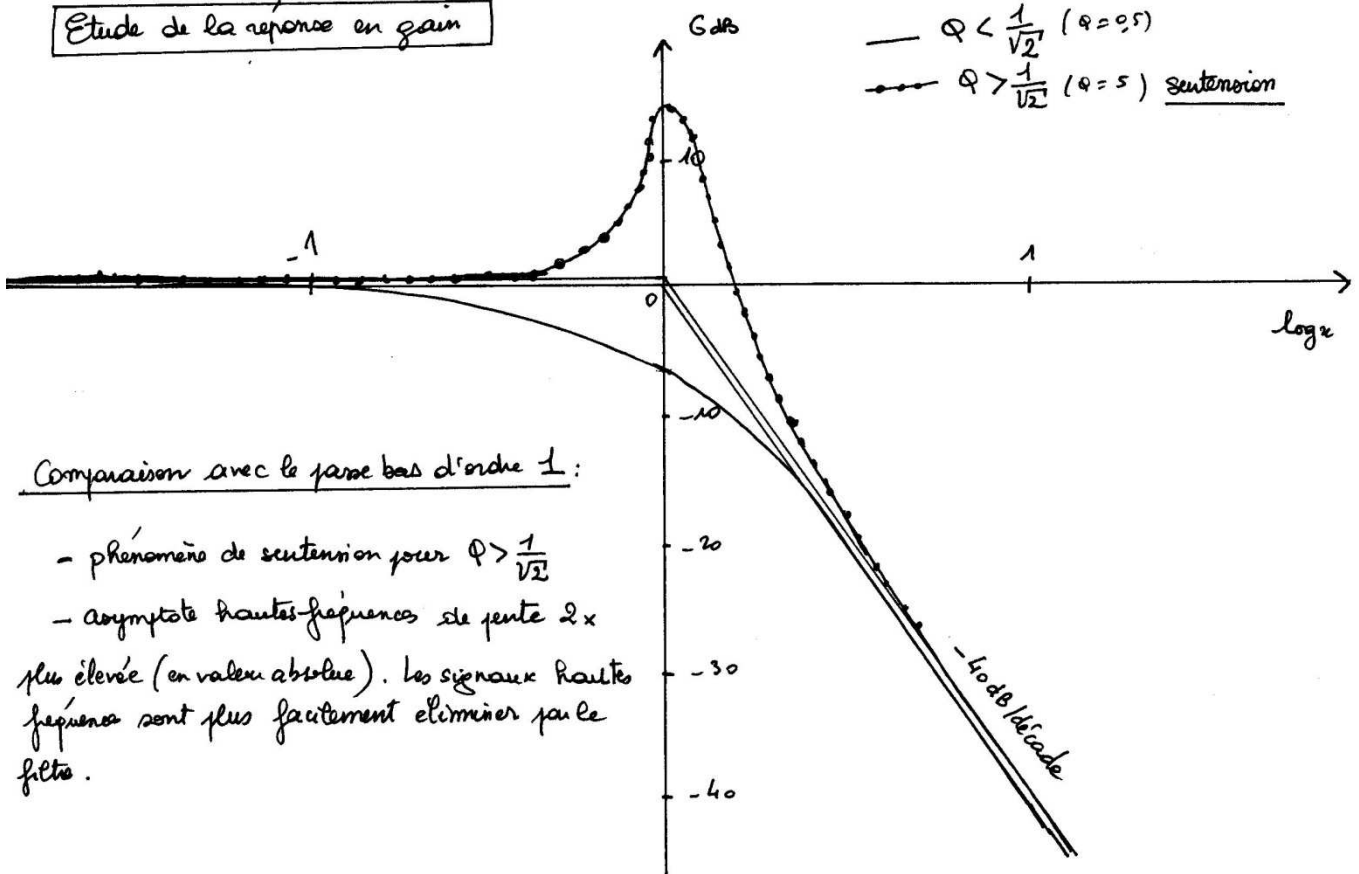
### Etude de la phase

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right) \text{ m\u00eame r\u00e9sultat que dans le chap 6.}$$



### c) Diagramme de Bode

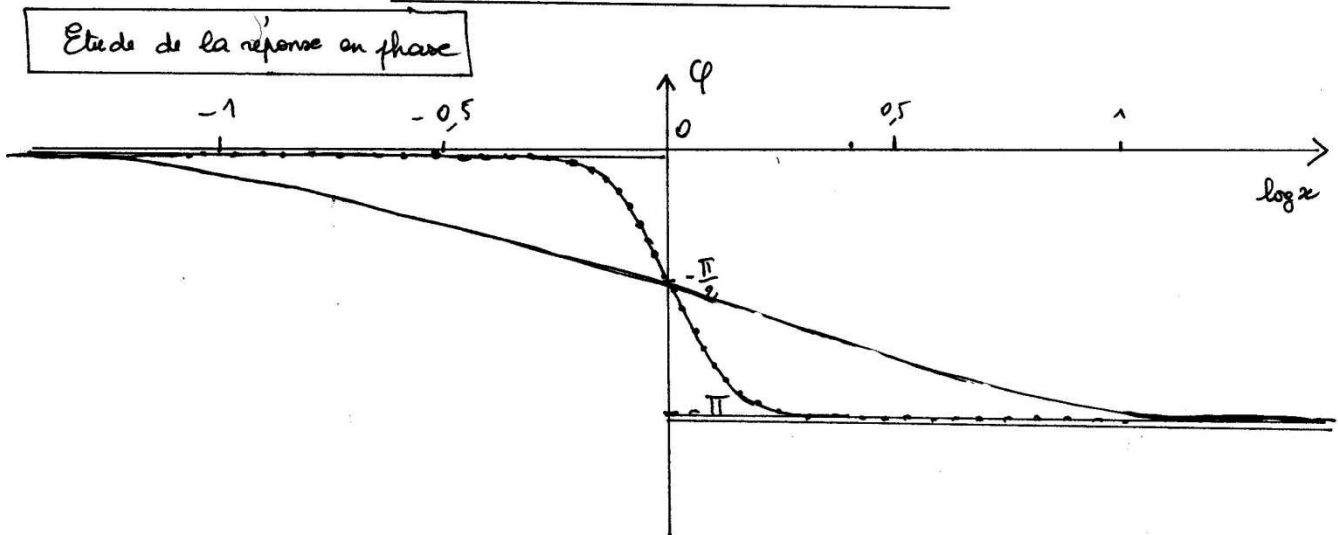
#### Etude de la réponse en gain



#### Comparaison avec le passe bas d'ordre 1 :

- phénomène de résonance pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- asymptote hautes-fréquences de pente  $2 \times$  plus élevée (en valeur absolue). Les signaux hautes fréquences sont plus facilement éliminés par le filtre.

#### Etude de la réponse en phase



• De la même manière qu'aux bornes de  $R$ , la rotation de la phase est d'autant plus rapide que  $Q$  est élevé.

• On obtient  $\varphi_{\text{sur}} = \varphi_c$  à partir de  $\varphi_{\text{sur}} = \varphi_R$  par la relation :

$$\varphi_c = \arg(H_c) = \arg(H_R) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{translation de } -\frac{\pi}{2} \text{ en ordonnée}).$$